Duopole avec biens d'expérience et consommateurs raisonnant par similarité

Reynald-Alexandre LAURENT*

22 février 2007
Première version - Préliminaire

Résumé

Deux firmes sont présentes sur le marché d'un bien d'expérience mais ne peuvent signaler leur "qualité". L'utilité nette attendue d'un bien par les consommateurs dépend de leur degré d'exigence et d'une information privée, plus ou moins précise. Ces consommateurs choisissent le bien qui maximise l'utilité nette pondérée par la similarité entre l'information privée et le bien considéré : ce critère de décision est une version simplifiée et statique de la "Case-Based Decision Theory" (Gilboa et Schmeidler, 1995). L'introduction des prix dans cette règle de décision permet d'établir des fonctions de demande dans un cadre spatial. Cet article montre qu'un équilibre de Nash en prix existe en fonction de la forme de l'utilité nette et du degré d'asymétrie des coûts. Lorsque les consommateurs sont peu exigeants, la différenciation est purement horizontale : chaque firme sert les consommateurs informés sur son bien. Si les consommateurs sont relativement exigeants, une dimension verticale est introduite dans la différenciation : la firme vendant le bien le moins apprécié choisit un prix faible et attire les consommateurs dont l'information est la moins précise. Les autres consommateurs achètent le bien concurrent. Toutefois, si les consommateurs sont très exigeants, cette dimension verticale disparaît.

CLASSIFICATION JEL : D11, D43, L13.

MOTS CLÉS : différenciation des produits, oligopole, biens d'expérience, information privée, théorie de la décision à base de cas.

*PSE, Paris-Jourdan Sciences Economiques (CNRS, EHESS, ENS, ENPC). Contact : CERAS-ENPC, 28 rue des Saints-Pères, 75007 PARIS ou reynald.laurent@free.fr

1 Introduction

Il est fréquent que les consommateurs doivent choisir entre des produits sur lesquels ils ne disposent pas d'informations fiables et précises quant à la qualité ou aux services rendus. Cette incertitude est caractéristique des biens d'expérience (Nelson, 1970) dont les acheteurs ne découvrent la qualité (ou l'utilité procurée) qu'à l'issue de la consommation. Il est pertinent de distinguer deux types possibles de biens d'expérience : les biens durables et les biens non-durables.

Les biens non-durables sont détruits après utilisation ou utilisés sur une courte période. Ils font donc l'objet d'un processus d'achats répétés par le consommateur, ce processus permettant un apprentissage à travers l'acquisition progressive d'information sur leur qualité. Sur ce type de marché, l'incertitude liée à l'introduction d'un nouveau produit se dissipe généralement lors des achats ultérieurs.

En revanche, l'utilisation des biens durables s'étend sur une longue période. Le rythme de répétition des achats par le consommateur est donc assez lent. Or, depuis les dernières décennies, on assiste à un accroissement du rythme de renouvellement de ces produits : les vagues d'innovation modifient les générations de produits et entraînent la disparition ou l'apparition de certains marchés. Par exemple, le rythme de renouvellement des modèles automobile est en moyenne de 2 ans et demi aujourd'hui alors que le rythme moyen de changement d'automobile chez un consommateur est de 5 ans. Cette analyse s'applique à de nombreux autres marchés à innovation rapide, comme l'informatique ou les téléphones portables. Ainsi, à la découverte de nouveaux produits, le consommateur est en situation d'incertitude, qu'il s'agisse d'un marché émergent ou d'un marché mature dont les produits ont évolué rapidement.

La littérature sur les biens d'expérience s'est beaucoup focalisée sur la possibilité offerte aux firmes de signaler leur qualité à travers des informations publiques, telles que le prix et la publicité. En particulier, un prix élevé, supérieur au coût de production de la qualité peut signaler une qualité élevée au consommateur. Dans un cadre de monopole, l'existence d'un équilibre séquentiel lorsque les achats sont répétés a été menée par Milgrom et Roberts (1986). Une analyse similaire dans le cas de biens durables a été menée par Bagwell et Riordan (1991) et étendue par Linnemer (2002). Le signalement des qualités dans un oligopole avec achats répétés et recherche d'information des consommateurs a également été étudié par Wolinski (1983) et Rogerson (1988). La possibilité pour les consommateurs d'utiliser une information privée en complément du signal a été introduite par Caminal et Vives (1996). Dans un cadre d'achat répété, ces auteurs montrent également qu'une part de marché élevée peut signaler une qualité élevée. En l'absence d'achat répété, le signalement par le couple prix-publicité dans le cadre d'un duopole a été étudié par Fluet et Garella (2002). L'impact du signalement sur les choix de positionnement des firmes dans un oligopole différencié verticalement et horizontalement a été analysé par Bester (1998) et Bontems et Meunier (2005).

Cependant, aucun consensus ne se dégage des études empiriques menées sur la théorie du signal. L'étude de Caves et Greene (1996) met en évidence une relation faible entre publicité et qualité, positive ou négative selon les produits, et conclut à l'absence de signalement de la qualité par la publicité. A l'inverse, pour Nichols (1998) ou Thomas et al. (1998), une partie des dépenses en publicité des firmes est expliquée par une qualité de leur produit plus élevée. Par ailleurs, la plupart des études menées concluent à l'absence de relation entre prix et qualité (voir par exemple Geistfeld, 1982 ou Gerstner, 1985) mais quelques études concluent à une relation positive et significative (Curry et Riesz, 1988).

Il semble donc que la théorie du signal ne soit pas applicable dans certaines situations de marché, pour différents motifs : les outils du signalement sont imparfaits (les prix ou la publicité ont de multiples fonctions, envoient des informations de différentes natures) ou inutilisables (la publicité est interdite), les firmes n'ont pas intérêt à signaler la qualité (le signalement est trop coûteux par rapport aux bénéfices) ou les consommateurs n'utilisent pas ces signaux. Ces consommateurs peuvent être imparfaitement rationnels ou ne pas avoir confiance dans les signaux provenant des firmes. Par ailleurs, la perception de la relation prix-qualité, et donc la capacité des consommateurs à interpréter les signaux envoyés par les firmes, semble varier selon le type de bien considéré. Plusieurs études confirment l'existence d'une telle contingence. Tout d'abord, Lichtenstein et Burton (1989) montrent que la perception de relation prix-qualité par les acheteurs est plus faible pour les biens durables que pour les biens non-durables. Ensuite, Caves et Greene (1996) trouvent une corrélation significative entre prix et qualité seulement en cas d'achats fréquents et peu importants. Enfin, Kardes et al (2004) ont montré que les acheteurs développent peu d'inférences entre prix et qualité lorsque la quantité d'information est faible et lorsque les informations sont obtenues aléatoirement.

Notre analyse se focalise sur l'achat de biens durables différenciés : ces biens sont achetés peu fréquemment et l'évolution permanente des marchés maintient les consommateurs en situation d'incertitude à chaque nouvel achat. Dans ce cadre, la relation prix-qualité est à la fois plus faible et l'inférence entre ces variables peu utilisée par les consommateurs. Nous supposons donc que les firmes ne peuvent signaler l'utilité de leur bien, les consommateurs ne faisant pas confiance à ce type d'informations publiques.

En revanche, nous supposons que les consommateurs possèdent une *information privée*, provenant de leur propre histoire de consommation ou de l'expérience de proches (information obtenue aléatoirement). Le rôle de telles informations privées a déjà été souligné lorsque les consommateurs ne possèdent pas de hiérarchie de préférence sur les biens. C'est le cas lorsque les consommateurs possèdent une variété préférée (Wolinski, 1984) ou lorsque la hiérarchie des qualités varie selon les consommateurs (Moscarini et Ottaviani, 2001). Cependant, le lien entre la nature des informations possédées par les consommateurs et la forme de différenciation sur le marché a été peu étudiée dans la littérature.

Dans cet article, nous supposons que les consommateurs choisissent le bien qui maximise l'utilité nette pondérée par la similarité entre l'information privée et le bien considéré : ce critère de décision correspond à une version simplifiée et statique de la "Case-Based Decision Theory" (Gilboa et Schmeidler, 1995). L'introduction des prix dans cette règle de décision permet d'établir des fonctions de demande dans un cadre spatial. Les conditions d'existence d'un équilibre de Nash en prix sont mises en évidence en fonction de la forme de l'utilité nette et de l'asymétrie des coûts. Lorsque les consommateurs sont peu exigeants, la différenciation est purement horizontale : chaque firme sert les consommateurs informés sur son bien. Si les consommateurs sont relativement exigeants, une dimension verticale est introduite dans la différenciation : la firme vendant le bien le moins apprécié choisit un prix faible et attire les consommateurs les moins informés. Les autres consommateurs achètent le bien concurrent. Toutefois, si les consommateurs sont très exigeants, cette dimension verticale disparaît.

Cet article est organisé de la façon suivante. La section 2 rappelle les propriétés de la "Case based Decision Theory". La section 3 présente les modalités d'application à la différenciation spatiale. La section 4 étudie les cas d'équilibre avec différenciation horizontale pure, lorsque les consommateurs sont attentistes ou aventureux. La section 5 étudie un cas d'équilibre lorsque les consommateurs sont exigeants et les formes de différenciation associées. Les conclusions sont présentées en section 6.

2 La "Case based decision theory" de Gilboa et Schmeidler

2.1 La règle de décision

La Case-Based Decision Theory (CBDT) est une théorie de la décision dans l'incertain proposée par Gilboa et Schmeidler (1995, 2001), qui peut aussi être appréhendée comme une théorie générale du raisonnement par induction.

Dans cette théorie, l'individu est doté d'une mémoire qui recense l'ensemble des problèmes rencontrés par le passé, ainsi que les choix (ou "actes") effectués et les résultats obtenus. La combinaison de ces trois éléments (un problème, un choix, un résultat) est appelée un "cas". Face à un nouveau problème de décision, l'individu va s'appuyer sur ces cas passés afin de déterminer quel acte possède les meilleures chances de succès. L'individu effectue alors une tâche d'évaluation dans laquelle il estime la similarité entre le nouveau problème et l'ancien problème. Puis il attribue un certain niveau d'utilité à chaque résultat obtenu, ce niveau pouvant être ajusté avec les attentes du décideur pour ce problème. Enfin, il évalue chaque option par la somme des niveaux d'utilité atteints par cette option lors de sa mise en oeuvre dans les cas passés, en pondérant chaque cas par le degré de similarité entre le problème dans ce cas et le nouveau problème auquel il fait face.

Voyons maintenant comment traduire formellement cette règle de décision. Soient P l'ensemble des problèmes de décision, A l'ensemble des actes pouvant être choisis pour le problème concerné et R l'ensemble des résultats possibles. Un cas est un triplet (q, a, r) où q représente le problème rencontré par le passé, a l'acte choisi et r le résultat obtenu. L'ensemble des cas possibles est alors donné par les triplets $C \equiv P \times A \times R$. A ce stade, deux fonctions doivent être définies. Tout d'abord, la fonction de similarité associe à 2 problèmes un nombre compris entre 0 et 1 correspondant au degré de similarité entre ceux-ci : $s : P \times P \longrightarrow [0, 1]$. Ensuite, le décideur est caractérisé par une fonction d'utilité $u : R \longrightarrow \mathbb{R}$ qui mesure la désirabilité du résultat et peut être positive ou négative.

Face à un *nouveau* problème $p \in P$, le décideur fait appel à sa mémoire, un sous-ensemble des cas possibles $M \subset C$. Le décideur peut avoir été le protagoniste des cas dans sa mémoire (on parlera alors de "cas interne"), mais ces cas peuvent aussi provenir de ses interactions avec d'autres individus ou des médias ("cas externe"). La version la plus élémentaire de la CBDT, définie par Gilboa et Schmeidler (1995) suppose qu'un décideur avec une mémoire M, une fonction de similarité s, une fonction d'utilité u, confronté à un nouveau problème p, va classer chaque acte $a \in A$ selon :

$$U(a) = U_{p,M}(a) = \sum_{(q,a,r) \in M} s(p, q)u(r)$$

Le produit $s(p, q)u(r)$ correspond à l'effet du cas c sur l'évaluation de l'acte a dans le problème présent p.

2.2 La forme des fonctions dans la CBDT

Plusieurs types de fonctions de similarité et d'utilité peuvent être utilisés dans ce cadre analytique.

Tout d'abord, la version standard de la CBDT considère une fonction de similarité totale entre les problèmes mais il est également possible de considérer une similarité moyenne donnée par :

$$s'(p,q) = \frac{s(p,q)}{\sum_{(q',a,r)\in M} s(p,q')}$$

si $\sum_{(q',a,r)\in M} s(p,q') > 0$ et égale à 0 sinon. Cette formulation permet d'éviter que la répétition d'actes passés affecte sa valorisation : elle est notamment pertinente lorsque les actes sont choisis assez souvent pour permettre des estimations statistiques sur leurs gains moyens.

Ensuite, la similarité est supposée concerner les seuls problèmes dans la version standard mais cette similarité peut être étendue aux couples problèmes-actes ou même aux triplets problèmes-actes-résultats (cf. Gilboa, Schmeidler et Wakker 2002).

Lorsque l'espace des problèmes est de forme Euclidienne, la fonction de similarité est vue comme une fonction décroissante de la distance Euclidienne entre les problèmes. Billot, Gilboa et Schmeidler (2005) ont proposé une axiomatisation d'une fonction de similarité de forme exponentielle négative $s(x,z) = exp[-n(x-z)]$ où x et z représentent ici des vecteurs de caractéristiques.

Par ailleurs, lorsque le décideur fonde son choix sur une fonction d'utilité brute, comme dans la version standard de la CBDT, son comportement peut paraître un peu myope. En effet, dans cette version, tous les actes n'ayant pas été utilisés dans le passé se voient affecter une utilité nulle. Ainsi, si le premier acte a choisi par l'individu pour résoudre un certain problème q a donné un résultat r tel que $u(r) > 0$, l'individu choisira toujours cet acte en cas de répétition du problème. Mais il est possible que ce résultat soit faible comparé à ceux qu'il est possible d'obtenir avec d'autres actes : le comportement du décideur CBDT peut apparaître myope dans le sens où il n'essaie jamais de nouveaux actes.

Pour surmonter cette limite, il est possible d'introduire des niveaux d'aspiration qui mesurent les attentes de l'individu. On suppose que le niveau d'aspiration augmente quand l'individu atteint un résultat supérieur à ses attentes et diminue dans le cas contraire. Cela revient à modéliser un comportement de satisficing au sens de Simon (1957). L'existence d'un niveau d'aspiration élevé peut conduire l'individu à essayer de nouveaux actes conduisant à un meilleur résultat. Les niveaux d'aspiration évoluent en fonction des expériences passées : on peut donc définir un niveau d'aspiration H_M associé à chaque mémoire M, afin de garder une trace des changements.

Le décideur maximise alors la fonction :

$$U(a) = U_{p,M}(a) = \sum_{(q,a,r)\in M} s(p,q)[u(r) - H_M]$$

Ainsi, la spécification de base est équivalente à cette nouvelle version dans laquelle le niveau d'aspiration est à 0. Il peut y avoir ou non ajustement des niveaux d'aspiration.

2.3 Littérature reliée et applications existantes

Deux axiomatiques de la CBDT ont été proposées par Gilboa et Schmeidler. La première (Gilboa et Schmeidler, 1995, 1997a et Gilboa, Schmeidler et Wakker, 2002) suppose que chaque cas ne se produit qu'une seule fois mais qu'un couple problème-acte donné peut engendrer un résultat différent selon les cas.

La seconde axiomatique (Gilboa et Schmeidler, 2001, 2003) suppose, elle que les cas peuvent être répétés plusieurs fois mais que tout couple problème-acte conduira nécessairement au même résultat. On peut noter que cette distinction dans les modalités de répétition n'est nécessaire que pour l'axiomatique (point de vue descriptif), pas pour la formulation de la théorie elle-même auprès d'un décideur connaissant ses propres variables (point de vue normatif).

Dans ce cadre avec ignorance sur les résultats des actes et problème peu familier, il paraît rationnel pour le décideur de la CBDT de s'appuyer sur les cas passés. Cependant, si le problème est répété plusieurs fois, il peut devenir familier pour l'individu, auquel cas le décideur décrit par la CBDT semble un peu myope. Afin de surmonter cette limite, Gilboa et Schmeidler (1996) ont montré que l'ajustement des niveaux d'aspiration par un décideur réaliste et ambitieux suivant la CBDT permet d'approximer le comportement d'un agent optimisateur. La CBDT est donc compatible aussi bien avec la rationalité parfaite qu'avec une vision des comportements plus proches d'une rationalité imparfaite. La CBDT a également été appliquée à un problème de prédiction et la règle retenue est la moyenne pondérée par la similarité (Gilboa, Lieberman et Schmeidler, 2006).

Les liens entre la CBDT et les autres théories de la décision dans l'incertain ont été analysés par Gilboa et Schmeidler. En particulier, la CBDT n'est pas une concurrente de la théorie de l'espérance d'utilité subjective (Savage, 1954) mais une approche complémentaire. Ainsi, lorsque la liste des états de la nature est connue, il est commode de recourir à la théorie de l'espérance d'utilité ou l'une de ses généralisations comportant des probabilités non-additives (Schmeidler, 1989) ou de multiples probabilités a priori (Gilboa et Schmeidler, 1989). Par contre, en cas d'ignorance structurelle, quand les états de la nature ne sont pas donnés et ne peuvent être facilement construits par le décideur, alors le recours à la CBDT est justifié. Cela se vérifie particulièrement si le problème est peu familier. Ainsi, la CBDT semble une théorie plausible pour analyser le comportement des acheteurs sur le marché d'un bien durable dont les variétés sont fréquemment renouvelées à travers les innovations.

La CBDT a déjà fait l'objet d'applications théoriques dans d'autres domaines : la théorie de la consommation dans un cadre d'achat répétés (Gilboa et Schmeidler, 1997b), le comportement de vote (Aragones, 1997), l'apprentissage social à travers la communication (Blonski, 1999), le choix de portefeuille et l'évolution des prix des actifs (Guerdjikova 2002, 2003a, 2003b, 2004) ou les choix de prix et de capacité d'un producteur (Jahnke, Chwolka et Simons, 2005).

Aucune de ces applications ne prend toutefois en compte les interactions entre agents aux objectifs généralement contradictoires (comme les consommateurs et les firmes). La prise en compte de ce type d'interactions est délicate et nécessite des hypothèses supplémentaires, ce qui explique notre choix d'un cadre statique. Alors que les applications existantes mettent davantage l'accent sur la répétition des achats dans la CBDT, cette application souligne plutôt l'intérêt des jugements de similarité qui peuvent s'avérer particulièrement intéressants dans le cas de produits différenciés.

3 Une application à la différenciation spatiale

Ce papier applique une version statique de la CBDT à la différenciation des produits, lorsque l'achat est non-répété et le signalement difficile à réaliser. La prise en compte de la mémoire des agents ou du raisonnement à partir d'informations passées ont déjà été considérés dans quelques articles. Alos-Ferrer

(2004) étudie un oligopole dans lequel les firmes ont une mémoire limitée sur les quantités et les profits et apprennent les meilleures stratégies. Anderson et De Palma (2005) étudient les stratégies de prix des firmes lorsque les consommateurs utilisent des règles simples pour déterminer leurs prix de réservation. Chen, Iyer et Pazgal (2005) analysent un modèle dans lequel les consommateurs se rappellent imparfaitement des prix. Spiegler (2006a,b) étudie les interactions de marché lorsque les consommateurs choisissent sur la base d'anecdotes.

3.1 La règle de décision

Soient deux firmes vendant des biens différenciés, représentés par des points dans un espace Euclidien et distants d'une longueur 1. La firme 1 est au point 0 et la firme 2 au point 1 de telle sorte que l'utilité procurée au consommateur par le bien 1 est $U(0)$ et par le bien 2, $U(1)$.

Il y a N consommateurs présents sur le marché qui achètent exactement une unité de l'un des biens. Chaque consommateur possède une information privée sur un bien, pouvant être représentée comme un point sur le segment compris entre les deux variétés de bien vendu. Par la suite, nous dirons qu'un consommateur possédant une information en x est présent en x : cela correspond à son *positionnement informationnel*. Un consommateur possédant une information en $x = 0$ connaît l'utilité procurée par le bien 1 alors qu'une information en $x = 1$ fournit l'utilité du bien 2. En revanche, un consommateur présent entre ces deux points n'a qu'une information imprécise sur l'utilité des différents biens. Puisque les acheteurs respectent la CBDT, nous supposons qu'un individu présent en x sera indifférent entre acheter le bien 1 et le bien 2 si :

$$U_0 + s(x,0)U(x) - p_1 = U_0 + s(x,1)U(x) - p_2 \tag{3.1}$$

U_0 représente l'utilité hors différenciation fournie par les biens : elle est supposée assez élevée pour que tous les consommateurs achètent exactement une unité de bien. Cette utilité n'intervient pas dans la formulation des demandes. La fonction s vérifiant $0 \leq s(x,y) \leq 1$ mesure la similarité entre l'information du consommateur présent en x et la variété de bien y. Cette fonction est croissante avec la *précision de l'information* que possède le décideur. Ainsi, une information assez précise sur un bien peut aussi être vue comme une information imprécise sur l'autre bien. L'utilité nette attendue par un consommateur ayant une information en x est notée $U(x)$: elle peut être positive ou négative en fonction du niveau des attentes de l'individu.

Pour mieux comprendre cette règle de décision, supposons d'abord que $p_1 = p_2$. Dans ce cas, si $U(x) > 0$, l'individu en x choisira le bien 1 si $s(x,0) > s(x,1)$: il achètera la variété la plus similaire avec son information s'il anticipe que cette variété lui procurera une utilité nette positive. En revanche, si $U(x) < 0$, l'individu choisira le bien 1 si $s(x,0) < s(x,1)$: lorsque son information lui indique une variété de bien non satisfaisante, l'individu achètera la variété la plus dissimilaire avec son information. Lorsque $p_1 \neq p_2$, l'individu effectue un arbitrage entre son information privée imprécise et la différence de prix observée : la perspective de réaliser une économie certaine peut contrebalancer l'information privée lorsque celle-ci est trop imprécise.

Par exemple, si l'acheteur a rencontré un individu satisfait d'un bien de la même marque que celle du bien 1, cet acheteur peut s'attendre à obtenir une utilité satisfaisante de ce bien. La précision de cette information dépend de la similarité entre le bien pour lequel l'acheteur a cette information et le bien qu'il désire acheter. Elle peut aussi dépendre de la confiance de l'acheteur dans le jugement de l'individu fournissant l'information.

3.2 Hypothèses sur la similarité et l'utilité

Afin d'aboutir à des demandes, nous ferons plusieurs hypothèses sur la forme des fonctions de similarité et d'utilité et sur les liens qui les relient.

Tout d'abord, nous avons vu précédemment que la fonction de similarité pouvait être représentée comme une fonction décroissante de la distance Euclidienne. Rappelons que Billot, Gilboa et Schmeidler (2005) ont axiomatisé une fonction de similarité de forme exponentielle négative. Une telle fonction est toutefois peu adaptée dans ce cadre spatial et nous retiendrons la spécification suivante :

H1 : la fonction de similarité est égale à l'inverse de la distance Euclidienne.

$$\begin{aligned} s(x,0) &= 1-x \\ s(x,1) &= 1-(1-x)=x \end{aligned}$$

La représentation de l'information privée comme un point du segment reliant les deux variétés peut s'interpréter de deux façons.

Une première interprétation est que l'individu a consommé une variété intermédiaire x ou possède une information correspondant à cette variété : par exemple, face à un bien de qualité faible et un bien de qualité élevée, l'individu possède une information sur l'utilité fournie par un bien de qualité intermédiaire. Cela revient à *contraindre la nature des informations* et donc la forme de l'espace qui les représente comme une droite. Dans ce cas, la fonction s s'interprète comme une similarité absolue.

Une autre interprétation est que l'individu raisonne par *similarité relative* : une telle règle de décision explique la forme de l'espace informationnel représenté sans contraindre la nature des informations. En effet, supposons que l'individu possède une information sur une variété quelconque distante de l_1 du bien 1 et de l_2 du bien 2. Si l'agent raisonne par similarité relative alors il est possible de retrouver la fonction s en posant $x = \dfrac{l_1}{l_1+l_2}$.

A ce stade, une autre hypothèse est nécessaire sur la relation entre l'information et l'utilité :

H2 : tous les consommateurs avec une information x possèdent la même utilité attendue $U(x)$.

Cette hypothèse est assez peu contraignante lorsque la similarité est absolue puisque tous les individus en x possèdent exactement la même information sur la variété intermédiaire. En revanche, cette hypothèse est contraignante lorsque x s'interprète comme la distance Euclidienne relative, puisque des acheteurs avec des informations sur des variétés différentes sont supposés obtenir la même utilité. La figure 1 présente la forme des lieux d'iso-utilité sur l'espace des informations, lorsque la variété du bien 1 est située au point de coordonnées (0,0) et la variété du bien 2 au point (1,0).

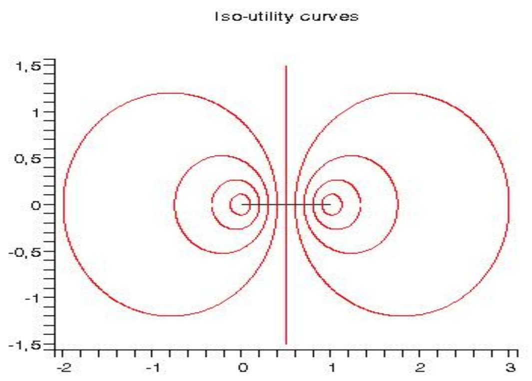


FIG. 1 – Courbes d'iso-utilité

La droite verticale correspond au lieu équidistant entre les variétés alors que les autres lieux d'iso-utilité ont une forme elliptique.

Puisque chaque individu possédant une information située en x sur le segment $[0;1]$ se voit affecter une utilité unique $U(x)$, il est donc possible de spécifier une fonction d'utilité U sur ce segment. Nous retiendrons la forme suivante :

H3 : $U(x)$ est linéaire sur $[0;1/2[$ et sur $]1/2;1]$ et continue en 1/2

De telles restrictions sur la fonction d'utilité s'interprètent de la façon suivante. Tout d'abord, un consommateur présent en $1/2$ ne possède aucune information privée précise sur les biens : l'utilité attendue du bien sur le marché $U(1/2)$ découle alors d'une *croyance*, partagée et identique pour tous les individus, sur les services que peut procurer un bien sur ce marché. Un consommateur présent en $x \in]0;1/2[$ possède une *information privée* supplémentaire relativement précise sur le bien 1 (ce qui est aussi une information peu précise sur le bien 2 puisqu'on se situe dans un espace Euclidien). Sur cet intervalle, l'information est supposée *fiable* de telle sorte que $\min(U(0);U(1/2)) \leq U(x) \leq \max(U(0);U(1/2))$ et $|U(x_1)-U(0)| < |U(x_2)-U(0)|$ lorsque $x_1 < x_2$, $\forall x_1, x_2 \in [0;1/2[$. Ces contraintes imposent que l'utilité soit continue et monotone sur cet intervalle. En particulier, il n'est rationnel pour les acheteurs d'utiliser la CBDT que si l'utilité est continue. De même, un consommateur présent en en $x \in]1/2;1[$ possède une information privée plus précise sur le bien 2 en complément de la croyance ce qui lui permet d'ajuster son utilité attendue. La contrainte de fiabilité impose également que l'utilité soit monotone et continue sur $]1/2;1]$. La figure 2 présente différentes formes de fonctions d'utilité.

Dans le cas a, l'un des biens procure une utilité plus élevée que l'autre. En l'absence d'information privée, la croyance des individus n'est pas biaisée puisqu'elle correspond à l'utilité moyenne du bien sur le marché. Les informations privées permettent une convergence progressive vers les "vraies" utilités des biens. Dans le cas b, les deux biens procurent la même utilité mais la croyance est biaisée : les biens ont une "mauvaise réputation" de sorte que l'utilité attendue par un consommateur ne disposant d'aucune information privée (situé en $x = 1/2$) est inférieure à l'utilité réelle. Dans l'exemple c, les biens procurent une utilité différente mais ont une "bonne réputation".

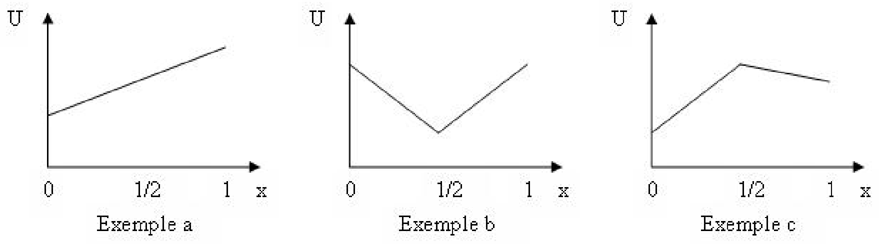


FIG. 2 – Quelques exemples de fonctions d'utilité

Par ailleurs, cette fonction U exprime l'utilité attendue nette des consommateurs : elle est égale au niveau d'utilité ressenti par le consommateur auquel on soustrait le *seuil d'aspiration* de ce consommateur. Le seuil d'aspiration est supposé identique pour tous les consommateurs du marché : les consommateurs ne diffèrent que par leur information privée. Lorsque l'utilité nette est positive sur tout l'intervalle $[0; 1]$, nous qualifierons les consommateurs d'*attentistes* : à prix égal, tous les consommateurs achètent le bien correspondant à leur consommation privée. Une utilité nette négative sur tout l'intervalle caractérise des consommateurs *aventureux*, ou ayant un goût pour le changement, et qui préfèrent à prix égal toujours acheter un bien différent de celui pour lequel ils sont informés. Ainsi, une utilité nette négative ne signifie pas que le bien en question est peu désirable mais plutôt que le consommateur préfère essayer une autre variété de ce bien. Enfin, lorsque le signe de l'utilité nette varie sur l'intervalle, les consommateurs peuvent préférer différentes variétés selon leur information : ils sont simplement *exigeants*.

Au final, soulignons que le prix n'est inclus ni dans la fonction de similarité ni dans la fonction d'utilité nette. D'une part, le prix est un élément certain alors que les utilités obtenues par la consommation sont incertaines. D'autre part, il est postulé que le prix ne constitue pas un signal de qualité.

3.3 Information des firmes et nature de la différenciation

Chaque firme connaît le nombre de consommateurs N (supposé très grand) et la forme de la fonction d'utilité sur l'espace des informations mais elle n'a aucune donnée sur la répartition des informations privées entre les consommateurs. En conséquence, les firmes supposent que les consommateurs sont répartis uniformément sur le segment $[0; 1]$. Chaque firme, neutre au risque, estime alors la *probabilité* d'attirer ces consommateurs en fonction de son prix, du prix de son rival et du (ou des) paramètre(s) d'utilité. Ces probabilités servent à construire des demandes de bien et chaque firme choisit le prix qui maximise son profit.

Sur un tel marché, la différenciation va alors être déterminée par le degré d'exigence des consommateurs, et plus généralement par la forme de la fonction d'utilité.

Considérons une fonction d'utilité définie sur l'intervalle $x \in [0; 1]$ et prenant la forme $U(x) = \alpha + \beta x$. Supposons ici, sans perte de généralité que $\beta \geq 0$, c'est-à-dire que la firme 2 vend le bien le plus apprécié par les consommateurs (le cas inverse avec $\beta < 0$ est symétrique) : on retrouve alors la fonction d'utilité correspondant à l'exemple a. Le bien 1 fournit une utilité nette aux consommateurs α et le bien 2 une utilité nette $\alpha + \beta$. Le paramètre β mesure donc l'écart entre les variétés en terme d'utilité. Lorsque $\beta > 0$, on pourrait s'attendre à une différenciation verticale des biens. Ce n'est pourtant pas toujours vrai car le terme α est aussi un indicateur du seuil d'aspiration, ou degré d'exigence des consommateurs.

Supposons d'abord que $\alpha > 0$. Dans ce cas, lorsque les prix sont égaux, les consommateurs suivant la CBDT choisiront toujours d'acheter le bien le plus similaire avec leur information privée et les firmes se partageront le marché à part égale. Si l'une des firmes diminuait son prix, elle pourrait attirer quelques consommateurs situés "au centre" du marché mais la majorité d'entre eux continueraient à acheter à la firme "la plus proche". Ainsi, *la différenciation est purement horizontale, même si les utilités nettes procurées par les firmes sont différentes.* On peut alors parler de différenciation par attentisme des individus. La forme de l'utilité attendue sur l'espace d'information joue donc un rôle plus important sur la nature de la différenciation que les utilités nettes réelles des deux biens. Lorsque $\beta = 0$, l'égalité 3.1 se reformule de la façon suivante :

$$p_1 + \alpha x = p_2 + \alpha(1 - x)$$

On retrouve donc le modèle de différenciation horizontale de Hotelling (1929) dans lequel α s'interprète comme le coût de transport.

Supposons désormais que $\alpha \in [-\beta; 0[$. Dans ce cas, à prix égal, certains consommateurs possédant une information précise sur le bien 1 préféreront acheter le bien 2. Lorsque $\alpha = -\beta/2$, tous les consommateurs ayant une information sur le bien 1 s'attendent à une utilité nette négative et préfèrent acheter le bien 2 alors que tous les consommateurs ayant une information sur le bien 2 s'attendent à une utilité nette positive et achètent ce bien. Une telle hiérarchie de préférence des agents est le signe d'une *différenciation verticale* pure. Dans les autres situations, la différenciation est à la fois horizontale et verticale : en effet, pour $\alpha < -\beta/2$ et toujours à prix égal, la firme 1 parvient à attirer les consommateurs ayant une information peu précise sur son bien et pour $\alpha > -\beta/2$, la firme 1 attire certains consommateurs ayant une information peu précise sur le bien 2. Par exemple, pour $\alpha = -\beta/4$, les consommateurs ayant une information en $x \in [0; 1/4] \cup [1/2; 1]$ achètent le bien 2 et les autres consommateurs achètent le bien 1.

Lorsque $\alpha < -\beta$, la différenciation est également purement horizontale mais la répartition des consommateurs diffère entre les firmes : chaque consommateur préférera choisir le bien le moins similaire avec son information dans l'espoir d'atteindre une utilité nette positive.

La nature de la différenciation sur le marché peut être discutée pour les différentes fonctions d'utilité respectant H3. Tout d'abord, quelque soit la forme de la fonction d'utilité, il existe toujours des niveaux d'aspiration telle que la différenciation soit horizontale : cela peut découler d'un fort attentisme (niveaux d'aspiration faibles d'où une utilité nette positive sur tout l'intervalle) ou d'une ambition élevée (niveaux d'aspiration forts d'où une utilité nette négative sur tout l'intervalle). En revanche, l'existence d'une dimension verticale de la différenciation pour certains niveaux d'aspiration n'est pas garantie pour toutes les formes de l'utilité. Par exemple, dans la forme d'utilité correspondant à l'exemple b, tout consommateur gagné par une firme sur la moitié du segment lorsque le niveau d'aspiration varie correspond à la perte d'un consommateur sur l'autre moitié : la différenciation est donc toujours purement horizontale. Dans l'exemple c, la différenciation peut être horizontale et verticale mais jamais purement verticale.

Finalement, la différenciation des produits sur ce marché dépend de la perception des produits par les consommateurs et de leur niveau d'aspiration quant aux biens.

4 Équilibres avec différenciation horizontale : acheteurs attentistes ou aventureux

4.1 Hypothèses

La règle de décision utilisée dans la section précédente est désormais utilisée afin de construire les demandes d'un duopole pour diverses fonctions d'utilité nettes. Le bien 1 procure une utilité $U(0)$ au consommateur et le bien 2 une utilité $U(1)$. Cette section sera consacrée à l'analyse de l'équilibre lorsque le signe de l'utilité ne varie pas le long de l'espace des informations. Rappelons que les consommateurs sont attentistes lorsque l'utilité est toujours positive et aventureux lorsque l'utilité est toujours négative.

Chaque firme supporte un coût unitaire de production c_i et vend son bien au prix p_i. Nous cherchons l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures. Ainsi, sur un marché comportant deux biens, un "équilibre en prix" est un vecteur de prix $(p_1^*; p_2^*)$ tel que chaque firme i maximise son profit pour la valeur p_i^* de p_i en fonction du prix p_j $(j \neq i)$ fixé par l'autre firme. Formellement, cela signifie que :

$$\Pi_i(p_i^*, p_j^*) \geq \Pi_i(p_i, p_j^*) \;\; \forall p_i \in S_i, \; \forall i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$$

Nous étudions ici une fonction d'utilité de forme assez générale, continue sur tout l'intervalle $[0, 1]$ compris entre les firmes et linéaire sur deux morceaux :

$$\begin{cases} U(x) = \alpha + \beta x \;\; \text{pour} \;\; x \in [0, 0.5] \\ U(x) = \gamma + \sigma x \;\; \text{pour} \;\; x \in [0.5, 1] \end{cases} \tag{4.1}$$

Le bien 1 procure donc une utilité nette $U(0) = \alpha$ et le bien 2 une utilité nette $U(1) = \gamma + \sigma$. Nous supposerons également que cette fonction est continue en $x = 0.5$ et nous noterons $\mu = \alpha + 0.5\beta = \gamma + 0.5\sigma$ l'utilité atteinte en ce point. Lorsque les consommateurs sont attentistes, les paramètres d'utilité doivent vérifier $\alpha > 0$, $\beta + \sigma > 0$ et $\mu > 0$. Lorsque les consommateurs sont aventureux, les inégalités inverses s'appliquent. Pour cette section seulement, nous supposerons que les firmes produisent à un coût unitaire symétrique $c_1 = c_2 = c$.

Le modèle de Hotelling (1929) peut être obtenu en fixant $\beta = \sigma = 0$, les paramètres $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ s'interprétant alors comme les coûts de transport des deux firmes (la version standard du modèle de Hotelling correspond donc à $\alpha = \gamma = t$).

4.2 Systèmes de demandes

Considérons tout d'abord le cas de *consommateurs attentistes*. Lorsque les consommateurs suivent la CBDT, la position dans l'espace d'information en $[0, 0.5]$ d'un consommateur indifférent entre acheter à la firme 1 et acheter à la firme 2 est donnée par :

$$(1 - x)(\alpha + \beta x) - p_1 = x(\alpha + \beta x) - p_2 \tag{4.2}$$

Cela revient à trouver les racines du polynôme de degré 2 suivant :

$$2\beta x^2 + (2\alpha - \beta)x - \alpha + p_1 - p_2 = 0$$

Ces racines sont données par :

$$x_1' = \frac{-2\alpha + \beta - \sqrt{\Delta_1}}{4\beta} \text{ et } x_1'' = \frac{-2\alpha + \beta + \sqrt{\Delta_1}}{4\beta}$$

avec $\Delta_1 = (2\alpha + \beta)^2 + 8\beta(p_2 - p_1)$

Voyons maintenant quelles conditions doivent vérifier x_1' et x_1'' pour appartenir à l'intervalle $[0, 0.5]$. Tout d'abord, la condition $\Delta_1 > 0$ est vérifiée si :

$$\begin{cases} p_1 - p_2 < \dfrac{\mu^2}{2\beta} \text{ lorsque } \beta \geq 0 \\ p_1 - p_2 > \dfrac{\mu^2}{2\beta} \text{ lorsque } \beta < 0 \end{cases}$$

avec toujours $\mu = \alpha + 0.5\beta = \gamma + 0.5\sigma$. Ensuite,

$$\begin{cases} 0 < x_1' < 0.5 \text{ si } \beta > 2\alpha \text{ et } p_1 - p_2 > \alpha \\ 0 < x_1'' < 0.5 \text{ si } \beta \geq 2\alpha \text{ et } p_1 - p_2 \geq 0 \text{ ou si } \beta \leq 2\alpha \text{ et } 0 \leq p_1 - p_2 < \alpha \end{cases}$$

Par symétrie, il est désormais possible de déterminer les coordonnées des consommateurs indifférents entre les deux biens et situés dans l'intervalle $[0.5, 1]$:

$$x_2' = \frac{-2\gamma + \sigma - \sqrt{\Delta_2}}{4\sigma} \text{ et } x_2'' = \frac{-2\gamma + \sigma + \sqrt{\Delta_2}}{4\sigma}$$

avec $\Delta_2 = (2\gamma + \sigma)^2 + 8\sigma(p_2 - p_1)$.

Les coordonnées x_2' et x_2'' doivent également respecter certaines conditions pour appartenir à l'intervalle $[0.5, 1]$. La condition $\Delta_2 > 0$ est vérifiée si :

$$\begin{cases} p_1 - p_2 < \dfrac{\mu^2}{2\sigma} \text{ lorsque } \sigma \geq 0 \\ p_1 - p_2 > \dfrac{\mu^2}{2\sigma} \text{ lorsque } \sigma < 0 \end{cases}$$

Lorsque cette condition est vérifiée, on a ensuite :

$$\begin{cases} 0.5 < x_2' < 1 \text{ si } \sigma < -\dfrac{2}{3}\gamma \text{ et } p_1 - p_2 < -\gamma - \sigma \\ 0.5 < x_2'' < 1 \text{ si } \sigma < -\dfrac{2}{3}\gamma \text{ et } p_1 - p_2 \leq 0 \text{ ou si } \sigma \geq -\dfrac{2}{3}\gamma \text{ et } -\gamma - \sigma < p_1 - p_2 \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, les fonctions de demande sont définies par morceaux. Le système de demande dépend de deux conditions sur les pentes des fonctions d'utilité : $\alpha \lesseqqgtr 2\beta$ et $\sigma \lesseqqgtr -\frac{2}{3}\gamma$.

Dans cette section, nous étudierons seulement un système de demande, noté S_1, pour lequel les pentes des fonctions d'utilité vérifient les conditions suivantes : $\beta \leq \alpha$ et $\sigma \geq -\frac{2}{3}\gamma$. En effet, les autres systèmes ne comportent pas d'équilibre symétrique et l'existence d'un équilibre asymétrique semble très peu probable dans un tel cadre (bien que l'absence d'équilibre soit très difficile à prouver). Voyons maintenant comment interpréter ces deux conditions. La première condition signifie que si l'utilité est croissante lorsque la précision de l'information sur le bien 1 décroît (les individus s'attendent à une utilité plus élevée lorsqu'ils se rapprochent du point $x = 0.5$), alors la pente de cette fonction d'utilité ne doit pas être trop forte. La seconde condition signifie que si l'utilité est décroissante lorsque la précision de l'information sur le bien 2 décroît (les individus s'attendent à une utilité plus faible lorsqu'ils se rapprochent du point $x = 0.5$), alors la pente de cette fonction d'utilité ne doit pas être trop forte. Mais comme les fonctions d'utilité se rejoignent en $x = 0.5$, ce couple de conditions revient à borner les pentes des deux utilités, qu'elles soient croissantes ou décroissantes.

Soit X_i la demande de bien i. Lorsque ces conditions sont vérifiées, les demandes de bien s'expriment de la façon suivante :

$$(S_1) \quad \begin{cases} X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \leq \underline{\delta} \\ X_1 = x_2'' \text{ et } X_2 = 1 - x_2'' & \text{si} \quad \underline{\delta} < p_1 - p_2 \leq 0 \\ X_1 = x_1'' \text{ et } X_2 = 1 - x_1'' & \text{si} \quad 0 \leq p_1 - p_2 < \overline{\delta} \\ X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \geq \overline{\delta} \end{cases}$$

Les seuils utilisés dans le système précédent correspondent à :

$$\underline{\delta} = \begin{cases} -\gamma - \sigma & \text{si} \quad \beta \geq 0 \text{ et } \sigma \geq 0 \\ \max(-\gamma - \sigma, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta \geq 0 \text{ et } \sigma < 0 \\ \max(-\gamma - \sigma;, \frac{\mu^2}{2\beta}) & \text{si} \quad \beta < 0 \text{ et } \sigma \geq 0 \\ \max(-\gamma - \sigma, \frac{\mu^2}{2\beta}, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta < 0 \text{ et } \sigma < 0 \end{cases}$$

$$\overline{\delta} = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad \beta \leq 0 \text{ et } \sigma \leq 0 \\ \min(\alpha, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta \leq 0 \text{ et } \sigma > 0 \\ \min(\alpha, \frac{\mu^2}{2\beta}) & \text{si} \quad \beta > 0 \text{ et } \sigma \leq 0 \\ \min(\alpha, \frac{\mu^2}{2\beta}, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta > 0 \text{ et } \sigma > 0 \end{cases}$$

Par symétrie, il est désormais possible de déterminer un système de demande semblable, noté S_1', lorsque *les consommateurs sont aventureux* :

$$(S_1') \quad \begin{cases} X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \leq \underline{\delta} \\ X_1 = 1 - x_1' \text{ et } X_2 = x_1' & \text{si} \quad \underline{\delta} < p_1 - p_2 \leq 0 \\ X_1 = 1 - x_2' \text{ et } X_2 = x_2' & \text{si} \quad 0 \leq p_1 - p_2 < \overline{\delta} \\ X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \geq \overline{\delta} \end{cases}$$

avec désormais :

$$\underline{\delta} = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad \beta \geq 0 \text{ et } \sigma \geq 0 \\ \max(\alpha, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta \geq 0 \text{ et } \sigma < 0 \\ \max(\alpha, \frac{\mu^2}{2\beta}) & \text{si} \quad \beta < 0 \text{ et } \sigma \geq 0 \\ \max(\alpha, \frac{\mu^2}{2\beta}, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta < 0 \text{ et } \sigma < 0 \end{cases}$$

$$\overline{\delta} = \begin{cases} -\gamma - \sigma & \text{si} \quad \beta \leq 0 \text{ et } \sigma \leq 0 \\ \min(-\gamma - \sigma, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta \leq 0 \text{ et } \sigma > 0 \\ \min(-\gamma - \sigma;, \frac{\mu^2}{2\beta}) & \text{si} \quad \beta > 0 \text{ et } \sigma \leq 0 \\ \min(-\gamma - \sigma, \frac{\mu^2}{2\beta}, \frac{\mu^2}{2\sigma}) & \text{si} \quad \beta > 0 \text{ et } \sigma > 0 \end{cases}$$

4.3 Équilibre en prix

Le profit d'une firme i est de forme $\Pi_i = (p_i - c)X_i$. Voyons désormais si un équilibre de Nash en prix existe pour le système de demande S_1.

Proposition 1 *Lorsque les consommateurs sont attentistes, il existe un équilibre de Nash en prix symétrique pour le système de demande S_1 si :*

$$-\frac{2}{3}\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$$

$$-\frac{2}{3}\gamma \leq \sigma \leq 2\gamma$$

Preuve : La preuve de cette proposition est fournie en Annexe 1.

Il semble peu probable qu'un équilibre, symétrique ou non, existe en dehors du système S_1 mais cela reste très difficile à prouver. Il est en revanche probable qu'un tel équilibre existe avec des coûts unitaires asymétriques mais les prix ne sont alors plus calculables de façon explicite.

A l'équilibre, les prix sont donnés par $p_1^* = p_2^* = \mu + c$ et les profits par $\Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{\mu}{2}$. Les firmes se partagent le marché à part égale en attirant les consommateurs "les plus proches", c'est-à-dire ceux dont la similarité entre l'information privée et le bien considéré est la plus élevée. La différenciation est de forme horizontale.

Ainsi, les prix dépendent de l'utilité attendue en l'absence d'information précise, μ. Tout accroissement uniforme de l'utilité permet évidemment aux firmes d'augmenter leurs prix. Lorsque l'utilité est monotone, cette croyance se situe à un niveau intermédiaire entre les utilités procurées par les deux biens : la firme vendant le bien avec la plus faible utilité profite de l'utilité élevée de sa rivale et de la faible exigence des consommateurs pour fixer un prix plus élevé. L'hétérogénéité entre les utilités est un facteur d'accroissement des prix, par exemple en comparaison avec un modèle de Hotelling standard (on retrouve l'équilibre habituel en posant $\alpha = \gamma$ et $\beta = \sigma = 0$). Lorsque l'utilité est non-monotone (changement du signe de la pente en $x = 0.5$), le niveau de prix pratiqué par les firmes dépend seulement de la "réputation" du bien sur le marché. Lorsque l'utilité est en forme de V retourné, le bien a une bonne réputation et les firmes peuvent fixer un prix élevé, quels que soient les niveaux d'utilité (positifs) procurés. Le cas inverse se produit lorsque l'utilité est en forme de V.

Enfin, par symétrie, cet équilibre peut être étendu au cas de *consommateurs aventureux*, lorsque l'utilité attendue est négative sur tout l'espace des informations.

Proposition 2 *Lorsque les consommateurs sont aventureux, il existe un équilibre de Nash en prix symétrique pour le système de demande S_1' si :*

$$2\alpha \leq \beta \leq -\frac{2}{3}\alpha$$

$$2\gamma \leq \sigma \leq -\frac{2}{3}\gamma$$

Preuve : La preuve de cette proposition est fournie en Annexe 1.

A l'équilibre, les prix sont donnés par $p_1^* = p_2^* = -\mu + c$ et les profits par $\Pi_1^* = \Pi_2^* = \dfrac{-\mu}{2}$ (avec toujours $\mu = \alpha + 0.5\beta = \gamma + 0.5\sigma$ qui est négatif ici). Les firmes se partagent le marché à part égale en attirant les consommateurs "les plus éloignés", c'est-à-dire ceux dont la similarité entre l'information privée et le bien considéré est la plus faible. Cela peut être interprété comme un besoin de changement. La différenciation est de forme horizontale, même s'il s'agit en quelque sorte d'une "différenciation à l'envers".

Les propriétés du lien entre les prix et la forme d'utilité mises en évidence dans le cas de consommateurs attentistes sont également valables lorsque les consommateurs sont aventureux.

La section suivante étudie le cas de consommateurs exigeants lorsque l'utilité est monotone : le signe de l'utilité peut varier sur l'espace de précision des informations.

5 Équilibre avec consommateurs exigeants et utilité monotone

5.1 Hypothèses

Nous étudions ici une fonction d'utilité continue et définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $U(x) = \alpha + \beta x$. En conséquence, le bien 1 procure une utilité nette $U(0) = \alpha$ alors que le bien 2 procure une utilité nette $U_1 = \alpha + \beta$.

Sans perte de généralité, supposons que $\beta > 0$, ce qui signifie que le bien 2 procure une utilité supérieure au bien 1 (le cas avec $\beta < 0$ peut être construit par symétrie et le cas avec $\beta = 0$ est incompatible avec un changement de signe de l'utilité nette). Par ailleurs, puisque le signe de l'utilité nette varie le long de l'intervalle $[0, 1]$, cela implique nécessairement que $-\beta < \alpha < 0$.

Comme dans la section précédente, chaque firme i supporte un coût unitaire c_i et l'existence d'un équilibre de Nash en prix est analysée.

5.2 Systèmes de demandes

Les coordonnées des consommateurs indifférents entre acheter le bien 1 ou le bien 2 sont établies à l'aide de l'équation 4.2, ce qui donne, pour rappel :

$$x' = \frac{-2\alpha + \beta - \sqrt{\Delta}}{4\beta} \quad \text{et } x'' = \frac{-2\alpha + \beta + \sqrt{\Delta}}{4\beta}$$

avec $\Delta = (2\alpha + \beta)^2 + 8\beta(p_2 - p_1)$

Sachant que $-\beta < \alpha < 0$ et $\mu = \alpha + 0.5\beta$, ces coordonnées appartiennent à $]0, 1[$ sous certaines conditions :

$$0 < x' < 1 \quad \text{si} \quad \alpha < p_1 - p_2 < \frac{\mu^2}{2\beta}$$
$$0 < x'' < 1 \quad \text{si} \quad -\alpha - \beta < p_1 - p_2 < \frac{\mu^2}{2\beta}$$

En conséquence, le système de demande dépend de la hiérarchie entre $-\alpha - \beta$ et α. Cela nous conduit à représenter le système de demande S_2 pour lequel $\alpha \in]-\beta, -\frac{1}{2}\beta[$ et le système S_3 pour lequel $\alpha \in]-\frac{1}{2}\beta, 0[$.

Lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}\beta$, on obtient un cas limite des systèmes précédents. Rappelons que cette situation correspond à une différenciation verticale pure : lorsque les prix sont égaux, tous les consommateurs ayant une information sur le bien 1 en $[0, 0.5]$ choisiront d'acheter le bien 2 (utilité nette attendue négative) et tous ceux ayant une information sur le bien 2 en $[0.5, 1]$ choisiront d'acheter le bien 2 (utilité nette attendue positive). En revanche, lorsque $\alpha \neq -\frac{1}{2}\beta$, la différenciation est à la fois horizontale et verticale : à prix égal, chaque firme parvient à attirer au moins quelques consommateurs.

Les différents intervalles de prix j d'un système de demandes S_i seront notés S_{ij}.

$$(S_2) \begin{cases} (S_{21}) \;\; X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \leq \alpha \\ (S_{22}) \;\; X_1 = 1 - x' \text{ et } X_2 = x' & \text{si} \quad \alpha < p_1 - p_2 \leq -\alpha - \beta \\ (S_{23}) \;\; X_1 = x'' - x' \text{ et } X_2 = 1 - x'' + x' & \text{si} \quad -\alpha - \beta < p_1 - p_2 < \frac{\mu^2}{2\beta} \\ (S_{24}) \;\; X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \geq \frac{\mu^2}{2\beta} \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} (S_{31}) \;\; X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \leq -\alpha - \beta \\ (S_{32}) \;\; X_1 = x'' \text{ et } X_2 = 1 - x'' & \text{si} \quad -\alpha - \beta < p_1 - p_2 \leq \alpha \\ (S_{33}) \;\; X_1 = x'' - x' \text{ et } X_2 = 1 - x'' + x' & \text{si} \quad \alpha < p_1 - p_2 < \frac{\mu^2}{2\beta} \\ (S_{34}) \;\; X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1 & \text{si} \quad p_1 - p_2 \geq \frac{\mu^2}{2\beta} \end{cases}$$

5.3 Équilibre en prix

Comme précédemment, une firme i produit au coût unitaire c_i et réalise un profit $\Pi_i = (p_i - c_i)X_i$. Voyons désormais si un équilibre de Nash en prix existe pour les systèmes de demande S_2 et S_3.

Proposition 3 *Lorsque les consommateurs sont exigeants, les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un équilibre de Nash local en prix dans les zones S_{23} et S_{33} sont :*

$$c_u < c_2 - c_1 < \min(c_l, c_r)$$

avec $c_u = \dfrac{(2\alpha+\beta)^2}{8\beta} + \dfrac{5\beta}{18} - \dfrac{1}{12}\sqrt{16\beta^2 + 5(2\alpha+\beta)^2}$, $c_l = \dfrac{(2\alpha+\beta)^2}{2\beta} + 4\alpha + \dfrac{7\beta}{2}$ *et* $c_r = \dfrac{(2\alpha+\beta)^2}{2\beta} - 4\alpha - \dfrac{\beta}{2}$
Sous certaines conditions, ce maximum local est aussi un équilibre global.

Preuve : La preuve d'existence du maximum local est fournie en Annexe 2, ainsi que les profits en cas de "déviation" en prix d'une firme sur un autre intervalle de S_2 ou S_3.

Au préalable, on remarque que ce maximum local existe pour $c_1 = c_2$ mais pas si l'asymétrie de coûts est trop forte. Les prix et conditions d'existence de l'équilibre peuvent être calculés de façon explicite. La figure 3 représente les conditions d'existence de l'équilibre pour $\beta = 1$ en fonction du paramètre d'utilité $\alpha \in]-\beta; 0[$ (en abscisses) et du degré d'asymétrie des coûts noté $c = c_2 - c_1$ (en ordonnées) :

La condition c_u est représentée en pointillés "croisés" alors que la condition $\min(c_l, c_r)$ est représentée en traits discontinus. En conséquence, le maximum local existe pour la zone comprise entre les deux courbes.

Il est plus délicat de prouver que ce maximum local est aussi un équilibre global. En particulier, le profit maximum réalisé en cas de déviation d'une firme au sein des "morceaux" S_{22} et S_{32} des systèmes S_2 et S_3 ne peut être identifié sans calculs très complexes. C'est pourquoi cette preuve est réalisée avec une

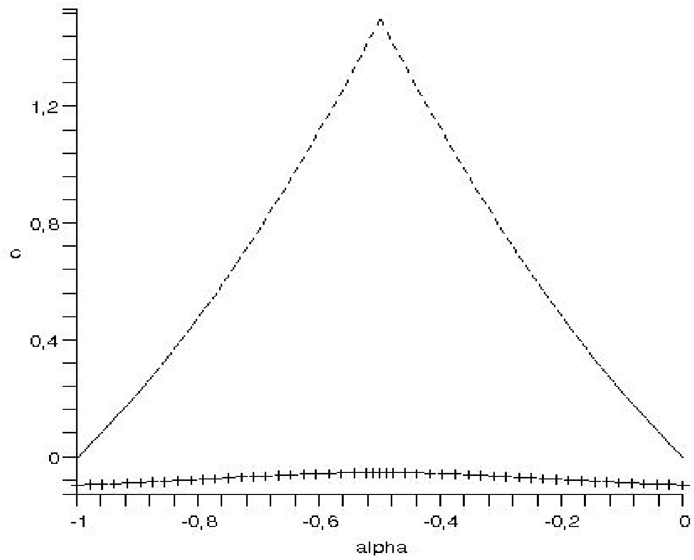


FIG. 3 – Conditions d'existence du maximum local

simulation numérique[1]. Cette simulation montre que la firme 2 peut avoir intérêt à dévier du maximum local pour certaines valeurs des paramètres : la zone d'existence de l'équilibre global est donc plus restreinte. Cette zone est représentée dans la figure 4 par le "triangle" compris entre la courbe avec pointillés "ronds" et la courbe en trait continu (définie sur deux morceaux).

Tout d'abord, notons que cet équilibre n'existe jamais lorsque les coûts unitaires sont identiques $c_1 = c_2$: la firme 1 doit nécessairement avoir un coût unitaire plus faible mais ces coûts unitaires ne doivent pas être trop hétérogènes. Ce résultat semble lié à la règle de décision des consommateurs postulée dans le modèle : en effet, lorsque le seuil d'aspiration caractérise des consommateurs exigeants, il existe un double effet privant la firme 1 de clientèle. D'une part, les consommateurs ayant une information privée sur la firme 1 préféreront acheter à la firme 2 car cette information est mauvaise ("rejet"). D'autre part, les consommateurs ayant une information privée sur la firme 2 préféreront acheter à la firme 2 car cette information est bonne ("attraction"). Ce double effet accroît l'incitation de la firme 2 à monopoliser le marché : il est donc nécessaire que la firme 1 possède un avantage en terme de coût pour survivre à ce double handicap.

Soulignons d'ailleurs que ce minimum de l'écart de coût doit être le plus élevé *lorsque la différenciation est purement verticale*, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{-\beta}{2}$. C'est aussi dans ce cas que l'avantage en coût de la firme 1 peut être le plus élevé sans remettre en cause l'existence de l'équilibre. Lorsque la différenciation est à la fois horizontale et verticale, cet équilibre existe seulement si la dimension horizontale n'est pas trop forte (il n'y a jamais d'équilibre lorsque $\alpha \to -\beta$ ou $\alpha \to 0$).

Ainsi, pour certaines valeurs des paramètres d'utilité et de coût, un équilibre existe lorsque l'utilité est strictement croissante sur l'espace des informations. Par symétrie, un tel équilibre existe également

[1] un fichier commenté permettant de reproduire le graphique suivant et de faire varier les paramètres est disponible sur demande

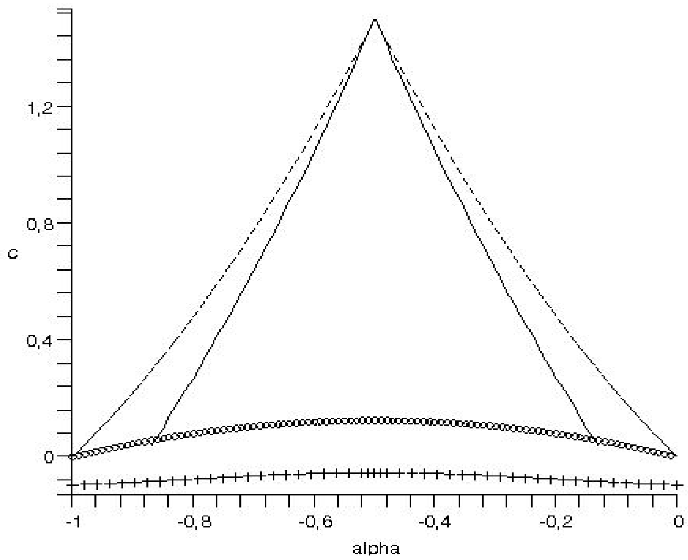


FIG. 4 – Conditions d'existence des maxima locaux et globaux

lorsque les rôles des firmes sont inversés, c'est-à-dire avec une fonction d'utilité décroissante $U = \alpha + \beta x$ avec $\beta < 0$ et $\alpha \in]0, -\beta[$.

Voyons désormais quelles sont les propriétés de cet équilibre. Les prix sont donnés par :

$$p_1^* = \frac{3}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + \frac{x}{10} + \frac{2(\beta + \sqrt{\Delta'})}{25}$$

$$p_2^* = \frac{3}{5}c_2 + \frac{2}{5}c_1 - \frac{x}{10} + \frac{3(\beta + \sqrt{\Delta'})}{25}$$

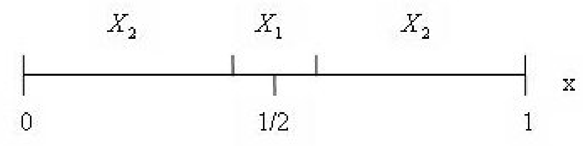
En définissant toujours $c = c_2 - c_1$, il est possible de comparer ces prix : $p_1^* - p_2^* < 0 \Leftrightarrow c > x - \sqrt{\frac{\beta x}{2}}$. Or cette condition est toujours vraie si $c > 0$, ce qui est une condition nécessaire de l'existence de l'équilibre global. Conformément à l'intuition, la firme 1, qui vend le bien procurant la plus faible utilité nette, vend donc à un prix inférieur à sa rivale. On constate également que p_1^* est croissant avec α et β : comme dans le cas précédent (consommateurs attentistes ou aventureux), une augmentation de l'écart d'utilité entre les firmes permet aux deux firmes d'augmenter leurs prix.

A l'équilibre les demandes vérifient :

$$X_1^* = \frac{\sqrt{20c + 5x + 4\beta + 4\sqrt{\Delta'}}}{5\sqrt{2\beta}}$$

$$X_2^* = \frac{5\sqrt{2\beta} - \sqrt{20c + 5x + 4\beta + 4\sqrt{\Delta'}}}{5\sqrt{2\beta}}$$

La répartition spatiale de ces demandes correspond au schéma suivant :



Ainsi, le faible prix fixé par la firme 1 lui permet d'attirer les consommateurs *les "moins bien informés"*, ceux dont la précision de l'information est la plus faible (au voisinage de $x = 0.5$). En revanche, tous Les consommateurs ayant une information relativement précise (soit sur l'utilité nette faible du bien 1, soit sur l'utilité nette élevée du bien 2) choisissent d'acheter le bien 2.

En différenciation verticale avec information parfaite mais hétérogénéité des goûts pour la qualité (Mussa et Rosen, 1978, Gabszewicz et Thisse, 1979 et Tirole, 1989), la firme vendant le bien de basse qualité attire les consommateurs avec le plus faible goût pour la qualité. Dans ce modèle avec homogénéité des goûts (et des niveaux d'aspiration) mais hétérogénéité des informations, la firme vendant le bien procurant l'utilité la plus faible attire les consommateurs les moins informés.

Enfin, les profits à l'équilibre sont donnés par :

$$\Pi_1^* = \frac{(20c + 5x + 4\beta + 4\sqrt{\Delta'})^{3/2}}{250\sqrt{2\beta}}$$

$$\Pi_2^* = \frac{(5\sqrt{2\beta} - \sqrt{20c + 5x + 4\beta + 4\sqrt{\Delta'}})(-20c - 5x + 6\beta + 6\sqrt{\Delta'})}{250\sqrt{2\beta}}$$

6 Conclusion

Lorsque les consommateurs disposent d'une information relativement fiable mais imprécise sur les biens, la différenciation des produits sur le marché dépend des paramètres caractérisant leur utilité attendue. Cet article montre que la présence d'une différence d'utilité entre les biens n'est pas suffisante pour l'existence d'une dimension verticale à la différenciation : il est nécessaire que les consommateurs soient relativement exigeants (mais pas trop) pour percevoir cette différence. Ainsi, des structures de différenciation horizontale peuvent exister même si les biens procurent des utilités différentes.

Plusieurs extensions de cet article sont possibles. Tout d'abord, l'étude de l'existence d'un équilibre lorsque les consommateurs sont exigeants et l'utilité non-monotone reste à réaliser. Ensuite, les hypothèses retenues lors de l'application de la CBDT à la différenciation des produits peuvent être discutables. En particulier, l'hypothèse H2, selon laquelle tous les individus avec la même précision d'information ont la même utilité attendue pourrait être relâchée en supposant une utilité aléatoire caractérisée par une moyenne et une variance. Enfin, il serait intéressant d'étudier le fonctionnement d'un marché et de caractériser la différenciation des produits lorsque les consommateurs réalisent des achats répétés et utilisent la CBDT.

7 Références bibliographiques

ALOS-FERRER C. (2004), "Cournot versus Walras in dynamic oligopolies with memory", *International Journal of Industrial Organization*, 22, 193-217.

ANDERSON S.J. et DE PALMA A. (2005), "Price Dispersion and Consumer Reservation Prices", *Journal of Economics and Management Strategy*, 14, 61-91.

ARAGONES E. (1997), "Negativity Effect and the Emergence of Ideologies", *Journal of Theoretical Politics*, 9, p. 189-210.

BAGWELL K. et RIORDAN M. (1991), "High and Declining Prices Signal Product Quality", *American Economic Review*, 81, 224-239.

BESTER H. (1998), "Quality uncertainty mitigates product differentiation", *RAND Journal of Economics*, 29, 828-844.

BILLOT A., GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (2005), "Axiomatization of an Exponential Similarity Function", mimeo.

BLONSKI, M. (1999), "Social Learning with Case-Based Decision", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 38, 59-77.

BONTEMS P. et MEUNIER V. (2005), "Advertising and Price Signaling of Quality in a Duopoly with Endogenous Locations", Centre for Industrial Economics Discussion Papers 2005-10.

CAMINAL R. et VIVES X. (1996), "Why market shares matter : An information-based theory", *RAND Journal of Economics*, 27, 221-239.

CAVES R.E. et GREENE D.P. (1996), "Brands' quality levels, prices, and advertising outlays : empirical evidence on signals and information costs", *International Journal of Industrial Organization*, 14, 29Ű52.

CHEN Y., IYER G. and PAZGAL A. (2005), "Limited Memory and Market Competition", mimeo.

CURRY D. et RIESZ P. (1988), "Prices and price/quality relationship : a longitudinal analysis", *Journal of Marketing*, 52, 36Ű51.

FLUET C. et GARELLA P.G. (2002), "Advertising and Prices as Signals of Quality in a Regime of Price Rivalry", *International Journal of Industrial Organization*, 20, 907-930.

GABSZEWICZ J.J. et THISSE J-F. (1979), "Price Competition, Quality and Income Disparities", *Journal of Economic Theory*, 20, 340-59.

GEISTFELD L. (1982), "The price-quality relationship revisited", *Journal of Consumer Affairs*, 16, 334-335.

GERSTNER E. (1985), "Do Higher Prices Signal Higher Quality ?", *Journal of Marketing Research*, 22, 209-215.

GILBOA I., LIEBERMAN O. et SCHMEIDLER D. (2006), "Empirical Similarity", *The Review of Economics and Statistics*, 88, 433-444.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (1989), "Maximin Expected Utility with a Non-Unique Prior", *Journal of Mathematical Economics*, 18, p. 141-153.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (1995), "Case-Based Decision Theory", *The Quarterly Journal of Economics*, 110, p. 605-639.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (1996), "Case-Based Optimization", Games and Economic Behavior, 15, p. 1-26.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (1997a), "Act Similarity in Case-Based Decision Theory", *Economic Theory*, 9, p. 47-61.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (1997b), "Cumulative Utility Consumer Theory", *International Economic Review*, 38, p. 737-761.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (2001), *A Theory of Case-Based Decisions*, Cambridge University Press.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D. (2003), "Inductive Inference : An Axiomatic Approach", *Econometrica*, 71, p. 1-26.

GILBOA I., SCHMEIDLER D. et WAKKER P. (2002), "Utility in Case-Based Decision Theory", *Journal of Economic Theory*, 105, p. 483-502.

GUERDJIKOVA A. (2002), "Case-Based Decision Theory - An Application for the Financial Markets", University of Heidelberg, mimeo.

GUERDJIKOVA, A. (2003a), "On the Definition and Existence of an Equilibrium in a Financial Market with Case-Based Decision Makers", University of Heidelberg, mimeo.

GUERDJIKOVA, A. (2003b), "Asset Pricing in an Overlapping Generations Model with Case-Based Decision Makers", University of Heidelberg, mimeo.

GUERDJIKOVA, A. (2004), "Evolution of Wealth and Asset Prices in Markets with Case-Based Investors", University of Heidelberg, mimeo.

HOTELLING H. (1929), "Stability in Competition", *Economic Journal*, 39, 41-57.

JAHNKE H., CHWOLKA A. et SIMONS D. (2005), "Coordinating Service-Sensitive Demand and Capacity by Adaptive Decision Making : An Application of Case-Based Decision Theory", *Decision Sciences*, 36, 1-32.

KARDES F. R., CRONLEY M. L., KELLARIS J. J. et POSAVAC S. S. (2004), "The Role of Selective Information Processing in Price-Quality Inference", *Journal of Consumer Research*, 31, 368-374.

LICHTENSTEIN D.R. et BURTON, S. (1989), "The relationship between perceived and objective price-quality", *Journal of Marketing Research*, 26, 429-443

LINNEMER L. (2002), "Price and advertising as signals of quality when some consumers are informed", *International Journal of Industrial Organization*, 20, 931-947.

MILGROM P. et ROBERTS J. (1986), "Prices and Advertising Signals of Product Quality", *Journal of Political Economy*, 94, 796-821.

MOSCARINI G. et OTTAVIANI M. (2001), "Price Competition for an Informed Buyer", *Journal of Economic Theory*, 101, 457-493.

MUSSA M. et ROSEN S. (1978), "Monopoly and Product Quality", *Journal of Economic Theory*, 18, 301-17.

NELSON P. (1970), "Information and Consumer Behaviour", *Journal of Political Economy*, 78, 311-329.

NICHOLS M. (1998), "Advertising and quality in the U.S. market for automobiles", *Southern Economic Journal*, 64, 922Ũ939.

ROGERSON W. P. (1988), "Price Advertising and the Deterioration of Product Quality", *Review of Economic Studies*, 55, 215-229.

SAVAGE L. J. (1954), *The foundations of Statistics*, New York, John Wiley and Sons.

SCHMEIDLER D. (1989), "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity", *Econometrica*, 57, p. 571-587.

SIMON H.A. (1957), *Models of Man*, New York, Wiley.
SPIEGLER R. (2006a), "The Market for Quacks", *Review of Economic Studies*, 73, 1113-1131.
SPIEGLER R. (2006b), "Competition over agents with boundedly rational expectations", *Theoretical Economics*, 1 , 207-231.
THOMAS L., SHANE S. et WEIGELT K. (1998), "An empirical examination of advertising as a signal of product quality", *Journal of Economic Behavior and Organization*,37 , 415Ű430.
TIROLE J. (1989), *The theory of industrial organization.* MIT Press, Cambridge, MA.
WOLINSKI A. (1983), "Prices as Signals of Quality", *Review of Economic Studies*, 50, 647-658.
WOLINSKI A. (1984), "Product Differentiation with Imperfect Information", *The Review of Economic Studies*, 51, 53-61.

8 Annexe 1 : preuve des propositions 1 et 2

8.1 Preuve de la proposition 1

Nous établissons d'abord la preuve de l'existence d'un équilibre local lorsque la différence de prix appartient à un certain intervalle. Puis nous montrons que cet équilibre est bien global pour tous les intervalles possibles.

Dans un premier temps, supposons que la différence de prix est comprise dans l'intervalle $0 \leq p_1 - p_2 < \overline{\delta}$. Dans ce cas, les profits s'écrivent :

$$\Pi_1 = \frac{(-2\alpha + \beta + \sqrt{\Delta_1})(p_1 - c)}{4\beta} \tag{8.1}$$

$$\Pi_2 = \frac{(2\alpha + 3\beta - \sqrt{\Delta_1})(p_2 - c)}{4\beta} \tag{8.2}$$

avec $\Delta_1 = (2\alpha + \beta)^2 + 8\beta(p_2 - p_1)$

Les dérivées des fonctions de profit permettent d'obtenir les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0 \Leftrightarrow -4\beta(p_1 - c) + (-2\alpha + \beta)\sqrt{\Delta_1} + (2\alpha + \beta)^2 + 8\beta(p_2 - p_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 0 \Leftrightarrow -4\beta(p_2 - c) + (2\alpha + 3\beta)\sqrt{\Delta_1} - (2\alpha + \beta)^2 - 8\beta(p_2 - p_1) = 0$$

On peut vérifier que les dérivées s'annulent pour $p_1 = p_2 = \alpha + \frac{1}{2}\beta + c$.

Les dérivées secondes indiquent qu'il s'agit bien d'un maximum :

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial p_1^2}\right|_{\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1}=0} = \frac{-3\sqrt{\Delta_1} + 2\alpha - \beta)}{\Delta_1} \tag{8.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial p_2^2}\right|_{\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2}=0} = \frac{-3\sqrt{\Delta_1} + 2\alpha + 3\beta)}{\Delta_1} \tag{8.4}$$

En effet, ces expressions sont strictement négatives lorsque les prix sont identiques. Ces prix appartiennent bien à l'intervalle de définition spécifié mais ils se situent à une "borne" de l'intervalle. Il faut donc qu'ils constituent également une meilleure réponse pour l'intervalle adjacent, dans lequel $\underline{\delta} < p_1 - p_2 \leq 0$. Pour cet intervalle, les profits s'écrivent :

$$\Pi_1 = \frac{(-2\gamma + \sigma + \sqrt{\Delta_2})(p_1 - c)}{4\sigma}$$

$$\Pi_1 = \frac{(2\gamma + 3\sigma - \sqrt{\Delta_2})(p_2 - c)}{4\sigma}$$

avec $\Delta_2 = (2\gamma + \sigma)^2 + 8\sigma(p_2 - p_1)$.

On remarque que les expressions sont identiques à 8.1 en 8.2 en remplaçant seulement α par γ et β par σ. En conséquence, il existe également un maximum local tel que $p_1 = p_2 = \gamma + \frac{1}{2}\sigma + c$. Puisque $\mu = \gamma + \frac{1}{2}\sigma = \alpha + \frac{1}{2}\beta$, il existe bien un équilibre local situé "sur le coude" de la fonction de demande. A cet équilibre chaque firme i réalise un profit $\Pi_i^* = \dfrac{\mu}{2}$.

Vérifions désormais que cet équilibre est bien global. Pour $p_2 = \mu + c$, la firme 1 a-t-elle intérêt à diminuer son prix afin de récupérer tout le marché ? En cas de déviation, le prix qui maximise le profit de 1 est $p_1 = p_2 + \underline{\delta}$ et cette firme réalise un profit $\Pi_1^d = \mu + \underline{\delta}$. Il convient désormais de comparer Π_1^* et Π_1^d pour les différentes valeurs que peut prendre $\underline{\delta}$:

- si $\underline{\delta} = -\gamma - \sigma$, alors $\Pi_1^d = -\dfrac{\sigma}{2} < 0$ et la déviation n'est pas profitable.
- si $\underline{\delta} = \frac{\mu^2}{2\sigma}$ avec $\sigma < 0$, alors $\Pi_1^d = \mu + \frac{\mu^2}{2\sigma}$. $\Pi_1^* > \Pi_1^d \Leftrightarrow \mu > -\sigma \Leftrightarrow \sigma > -\frac{2}{3}\gamma$.
- si $\underline{\delta} = \frac{\mu^2}{2\beta}$ avec $\beta < 0$, alors $\Pi_1^d = \mu + \frac{\mu^2}{2\beta}$. $\Pi_1^* > \Pi_1^d \Leftrightarrow \mu > -\beta \Leftrightarrow \beta > -\frac{2}{3}\alpha$.

Étudions désormais la possibilité de déviation de la firme 2 : lorsque $p_1 = \mu + c$, celle-ci peut s'accaparer tout le marché en fixant $p_2 = p_1 - \overline{\delta}$ et réaliser un profit $\Pi_2^d = \mu - \overline{\delta}$. Ce profit est comparé à Π_2^* :

- si $\overline{\delta} = \alpha$, alors $\Pi_2^d = \frac{\beta}{2}$ et $\Pi_2^* > \Pi_2^d \Leftrightarrow \mu > \beta \Leftrightarrow \beta < 2\alpha$.
- si $\overline{\delta} = \frac{\mu^2}{2\sigma}$ avec $\sigma > 0$, alors $\Pi_2^d = \mu - \frac{\mu^2}{2\sigma}$. $\Pi_2^* > \Pi_2^d \Leftrightarrow \mu > \sigma \Leftrightarrow \sigma < 2\gamma$.
- si $\overline{\delta} = \frac{\mu^2}{2\beta}$ avec $\beta > 0$, alors $\Pi_2^d = \mu - \frac{\mu^2}{2\beta}$. $\Pi_2^* > \Pi_2^d \Leftrightarrow \mu > \beta \Leftrightarrow \beta < 2\alpha$.

Le regroupement des conditions permet d'établir la proposition 1.■

8.2 Preuve de la proposition 2

Nous utilisons la propriété de symétrie du système S_1' par rapport à S_1 pour prouver la proposition 2. Supposons que $\underline{\delta} < p_1 - p_2 \leq 0$. Dans ce cas, les profits s'écrivent :

$$\Pi_1 = \frac{(2\alpha + 3\beta + \sqrt{\Delta_1})(p_1 - c)}{4\beta} \tag{8.5}$$

$$\Pi_2 = \frac{(-2\alpha + \beta - \sqrt{\Delta_1})(p_2 - c)}{4\beta} \tag{8.6}$$

Les dérivées des fonctions de profit permettent d'obtenir les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0 \Leftrightarrow -4\beta(p_1 - c) + (2\alpha + 3\beta)\sqrt{\Delta_1} + (2\alpha + \beta)^2 + 8\beta(p_2 - p_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 0 \Leftrightarrow -4\beta(p_2 - c) + (-2\alpha + \beta)\sqrt{\Delta_1} - (2\alpha + \beta)^2 - 8\beta(p_2 - p_1) = 0$$

Lorsque $p_1 = p_2$, $\sqrt{\Delta_1} = -2\alpha - \beta$ afin de garantir la positivité. En posant toujours $\mu = \gamma + \frac{1}{2}\sigma = \alpha + \frac{1}{2}\beta$, ce système est résolu pour $p = -\mu + c$. Comme dans la preuve de la section précédente, ce prix est également solution du couple de conditions du premier ordre lorsque $0 \leq p_1 - p_2 < \overline{\delta}$ et toutes les conditions du second ordre sont respectées. En conséquence, il s'agit bien d'un maximum local.

Les conditions énoncées dans la proposition 2 peuvent ensuite être retrouvées en étudiant si ce maximum local est bien global. Comme exposé précédemment, les valeurs possibles des seuils $\underline{\delta}$ et $\overline{\delta}$ sont inversées entre les systèmes de demande S_1 et S_1' : en conséquence, le sens des inégalités est également inversé entre les conditions de la proposition 1 et les conditions de la proposition 2.■

9 Annexe 2 : preuve de la proposition 3

9.1 Maximum local

Supposons que la différence de prix appartienne à l'intervalle S_{23} lorsque $\alpha \in]-\beta, -\frac{\beta}{2}[$ et à l'intervalle S_{33} lorsque $\alpha \in]-\frac{\beta}{2}, 0[$. Dans ce cas, les profits sont donnés par :

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{\Delta}(p_1 - c_1)}{2\beta} \tag{9.1}$$

$$\Pi_2 = \frac{(2\beta - \sqrt{\Delta})(p_2 - c_2)}{2\beta} \tag{9.2}$$

avec $\Delta = (2\alpha + \beta)^2 + 8\beta(p_2 - p_1)$

Les conditions de premier ordre prennent la forme de :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0 \Leftrightarrow -2(p_1 - c_1) + x + 4(p_2 - p_1) = 0 \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 0 \Leftrightarrow -2(p_2 - c_2) + \sqrt{\Delta} - x - 4(p_2 - p_1) = 0 \tag{9.4}$$

avec $x = \dfrac{(2\alpha + \beta)^2}{2\beta}$.

La condition (9.3) nous permet de déterminer la fonction de réaction de la firme 1 :

$$p_1 = \frac{c_1 + 2p_2}{3} + \frac{x}{6} \tag{9.5}$$

Le prix d'équilibre de la firme 2 peut alors être calculé en utilisant (9.5) dans (9.4). Après quelques simplifications, on obtient le polynôme suivant :

$$100p_2^2 - p_2(120c_2 + 80c_1 - 20x + 24\beta) + (x^2 + 36c_2^2 + 16c_1^2 + 48c_1c_2 - 12xc_2 - 8xc_1 - 6\beta x + 24\beta c_1) = 0$$

Le discriminant est alors $\widetilde{\Delta} = 576\Delta'$ avec $\Delta' = \beta[10(c_2 - c_1) + 2.5x + \beta]$. Ces prix existent si $\Delta' > 0 \Leftrightarrow c_2 - c_1 > \dfrac{-x}{4} - \dfrac{\beta}{10}$.

L'utilisation du polynôme et de (9.5) permettent de déterminer les prix d'équilibre, donnés par :

$$p_1^* = \frac{3}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + \frac{x}{10} + \frac{2(\beta + \sqrt{\Delta'})}{25}$$

$$p_2^* = \frac{3}{5}c_2 + \frac{2}{5}c_1 - \frac{x}{10} + \frac{3(\beta + \sqrt{\Delta'})}{25}$$

Les conditions de second ordre sont :

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial p_1^2}\right|_{\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1}=0} = \frac{-6}{\sqrt{\Delta}} \tag{9.6}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial p_2^2}\right|_{\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2}=0} = \frac{2(-3\sqrt{\Delta}+2\beta)}{\Delta} \tag{9.7}$$

La première condition est toujours négative mais ce n'est pas le cas de la seconde : il s'agit d'un maximum si $\sqrt{\Delta} > \frac{2\beta}{3}$ ce qui revient à :

$$p_1 - p_2 < \frac{-x}{4} + \frac{\beta}{18} \tag{9.8}$$

Cette condition restreint donc l'intervalle des prix.

Soit $c = c_2 - c_1$. A l'équilibre, cette différence de prix est :

$$p_1^* - p_2^* = \frac{-5c + 5x - \beta - \sqrt{\Delta'}}{25} \tag{9.9}$$

En conséquence, la condition de second ordre pour Π_2 est vérifiée si :

$$-180c - 45x + 14\beta < 36\sqrt{\Delta'} \tag{9.10}$$

Si le terme de gauche est négatif, l'inégalité suivante est toujours vérifiée. Une condition suffisante est donc donnée par l'inégalité suivante :

$$c > -\frac{x}{4} + \frac{7\beta}{90} = \widetilde{c_u} \tag{9.11}$$

Dans le cas général, la condition 9.10 peut se réécrire sous la forme d'un polynôme :

$$1296c^2 - c(720\beta + 648x) - 180\beta x - 44\beta^2 + 81x^2 < 0$$

Ce polynôme admet deux racines données par :

$$c'_u = \frac{x}{4} + \frac{5\beta}{18} - \frac{1}{3}\sqrt{\beta^2 + 2.5\beta x} \text{ et } c_u = \frac{x}{4} + \frac{5\beta}{18} + \frac{1}{3}\sqrt{\beta^2 + 2.5\beta x}$$

Le polynôme est négatif pour $c \in [c'_u, c_u]$. Par ailleurs, on remarque que $c_{u'} < \widetilde{c_u} < c_u$, $\forall \beta > 0$ et $\forall \alpha \in [-\beta, 0]$. En conséquence, la condition de second ordre de maximisation du profit est vérifiée pour $c > c_u$ et on retrouve ainsi la borne inférieure de la différence de coûts dans la proposition 3.

Voyons maintenant si la différence de prix appartient bien à l'intervalle donné par les systèmes de demande S_2 et S_3.

Tout d'abord, lorsque $\alpha \in]-\beta, -\frac{1}{2}\beta[$ (système S_2), la différence de prix doit vérifier $-\alpha-\beta < p_1 - p_2 < \frac{x}{4}$. La différence de prix ne dépasse jamais la borne supérieure tant que la condition de second ordre (9.8) est vérifiée. En revanche, la condition $p_1 - p_2 > -\alpha - \beta$ peut se reformuler de la façon suivante :

$$\sqrt{\Delta'} < -5c + 5x + 24\beta + 25\alpha \tag{9.12}$$

Une condition nécessaire est que le terme de droite soit positif, ce qui impose :

$$c < x + \frac{24\beta}{5} + 5\alpha = \widetilde{c_l}$$

La condition 9.12 peut alors être transformée en un polynôme :

$$2c^2 - 4c(x + 5(\alpha + \beta)) + 2x^2 + 19x\beta + 20x\alpha + 46\beta^2 + 96\alpha\beta + 50\alpha^2 > 0$$

Ce polynôme admet deux racines données par :

$$c_l = x + 4\alpha + \frac{7\beta}{2} \text{ et } c_l' = x + 6\alpha + \frac{13\beta}{2}$$

La hiérarchie suivante est vérifiée : $c_l < \widetilde{c_l} < c_l'$. En conséquence, $p_1 - p_2 > -\alpha - \beta \Leftrightarrow c < c_l$, ce qui permet d'obtenir l'une des bornes supérieures de la proposition 3.

Ensuite, lorsque $\alpha \in]-\frac{1}{2}\beta, 0[$ (système S_3), la différence de prix doit vérifier $\alpha < p_1 - p_2 < \frac{x}{4}$. La condition $p_1 - p_2 > \alpha$ peut se reformuler en :

$$\sqrt{\Delta'} < -5c + 5x - \beta - 25\alpha \tag{9.13}$$

Le terme de droite doit être positif, ce qui nécessite de vérifier :

$$c < x - \frac{\beta}{5} - 5\alpha = \widetilde{c_r}$$

La condition 9.13 peut alors être formulée comme le polynôme suivant :

$$c^2 + c(-2x + 10\alpha) + x^2 - \frac{x\beta}{2} - 10\alpha x + 2\alpha\beta + 25\alpha^2 > 0$$

Ce polynôme admet deux racines :

$$c_r = x - 4\alpha - \frac{\beta}{2} \text{ et } c_r' = x - 6\alpha + \frac{\beta}{2}$$

L'inégalité suivante est vérifiée : $c_r < \widetilde{c_r} < c_r'$. En conséquence, $p_1 - p_2 > \alpha \Leftrightarrow c < c_r$, ce qui permet d'obtenir la seconde borne de la proposition 3.

Le seuil c_l est croissant avec α alors que c_r est décroissant avec α et les seuils sont égaux pour $\alpha = \frac{-\beta}{2}$. Puisque c_l est défini sur $]-\beta, -\frac{1}{2}\beta[$ et c_r sur $]-\frac{1}{2}\beta, 0[$, il est possible d'utiliser la fonction $\min(c_l, c_r)$ comme borne supérieure de c dans la proposition 3. ■

9.2 Maximum global

A l'équilibre, les profits sont donnés par :

$$\Pi_1^* = \frac{(20c + 5x + 4\beta + 4\sqrt{\Delta'})^{3/2}}{250\sqrt{2\beta}}$$

$$\Pi_2^* = \frac{(5\sqrt{2\beta} - \sqrt{20c + 5x + 4\beta + 4\sqrt{\Delta'}})(-20c - 5x + 6\beta + 6\sqrt{\Delta'})}{250\sqrt{2\beta}}$$

avec toujours $\Delta' = \beta(10c + 2.5x + \beta)$ et $x = \dfrac{(2\alpha + \beta)^2}{2\beta}$.

L'étude de l'existence de déviations profitables nécessite le recours à une simulation numérique. Cette simulation est réalisée pour $\beta = 1$ et $\alpha \in]-\beta, 0[$.

Lorsque la firme 1 dévie en S_{21} ou en S_{31} (selon l'intervalle dans lequel se situe α), elle réalise au maximum les profits suivants :

$$\Pi_1^{S_{21}} = p_2^* - \alpha - c_1 \text{ ou } \Pi_1^{S_{31}} = p_2^* + \alpha - c_1$$

Les simulations montrent que $\Pi_1^* > \Pi_1^{S_{21}}$ et $\Pi_1^* > \Pi_1^{S_{31}}$ quelles que soient les valeurs des paramètres.

Lorsque la firme 2 dévie en S_{24} ou en S_{34}, elle réalise au maximum le profit suivant :

$$\Pi_2^{S_{24}} = \Pi_2^{S_{34}} = p_1^* - \frac{x}{4} - c_2$$

Ce profit peut être supérieur à Π_2^*, ce qui donne lieu à une nouvelle condition mettant en relation la différence de coûts c et le paramètre d'utilité α. Cette condition est représentée par la courbe avec des pointillés sous forme de ronds dans la figure 4 : la déviation est non-profitable dans la partie supérieure à cette courbe. Cette condition est plus contraignante que la condition d'existence du maximum local $c > c_u$.

Enfin, lorsque les firmes dévient en S_{22} ou en S_{32}, le maximum du profit sur l'intervalle de prix ne peut être identifié sans calculs supplémentaires. Après avoir exprimé la fonction de profit $\Pi_i^{S_{j2}}$ d'une firme i dans le système j, il convient d'identifier la fonction de meilleure réponse de cette firme dans l'intervalle de prix, sachant que l'autre firme choisira p_j^*. Cette fonction de meilleure réponse est établie en calculant $\frac{\partial \Pi_i^{S_{j2}}(p_j^*)}{\partial \partial p_i} = 0$ lorsque la condition de second ordre est vérifiée. La simulation permet de déterminer plus facilement le maximum de profit sur l'intervalle. La firme 1 n'a jamais intérêt à dévier du maximum local mais ce n'est pas toujours vrai pour la firme 2, ce qui donne naissance à une nouvelle condition, représentée par un trait continu dans la figure 4. La déviation est non-profitable pour la firme 2 en dessous de cette courbe et cette condition est plus contraignante que la condition d'existence du maximum local $c < \min(c_l, c_r)$.